MA1 - přednáška 16.12.2019 (první část) (a 14.12.2020)

Lineární diferenciální rovnice (obyčejné) 1. řádu

Lineární (obyčejná) diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice

$$(1) \qquad y' + p(x)y = f(x),$$

kde $p(x), f(x)$ jsou funkce, definované v intervalu $(a,b) \subset R$ a $y = y(x)$ je funkce neznámá, která má derivaci $y'(x)$, $x \in (a,b)$.

Cauchyho (počáteční) úloha pro rovnici (1) je úloha najít takové řešení $y = y(x)$, $x \in (a,b)$, pro které platí

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in (a,b),\ y_0 \in R.$$

(tj. $y(x)$ splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$)

Platí

Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení (1),(2))

Jsou-li funkce $p(x), f(x)$ spojité v (a,b) (značíme $p, f \in C(a,b)$), $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in R$, pak lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y = f(x)$$

má jediné řešení $y(x) \in C^{(1)}(a,b)$, které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Poznámka: Název „lineární" rovnice souvisí s vlastnostmi zobrazení $y \in C^{(1)}(a,b) \longrightarrow y' + p(x)y \in C(a,b)$:

(lineární diferenciální operátor je obvyklý název tohoto zobrazení : $D(y) = y' + p(x)y$)

1) $y_1, y_2 \in C^{(1)}(a,b)$, pak $D(y_1+y_2) = D(y_1) + D(y_2)$

2) $c \in R$, $y \in C^{(1)}(a,b)$, pak $D(cy) = c\,D(y)$

Jak najdeme řešení rovnice

$$(1) \qquad y' + p(x)y = f(x) \;, \; x \in (a,b)$$

za předpokladu $p, f \in C(a,b)$ (a počáteční úlohy pro rovnici (1)) ?

1) Řešíme l. ř. homogenní rovnici ("rovnici bez pravé strany"), příslušnou k rovnici (1) ("místo" $f(x)$ je na pravé straně rovnice funkce nulová):

$$(2) \qquad y' + p(x)y = 0 \quad ,(tj. \text{ separace })$$

$$y' = -p(x)y \;, \; x \in (a,b)$$

a zde je hned stacionární řešení $y(x) = 0, x \in (a,b)$ --(i)
nebo separací máme (pro $y(x) \neq 0 , x \in (a,b)$)

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \;,$$

a $\ln|y(x)| = -P(x) + C$ ($P(x)$ je primitivní fce k $p(x)$ v (a,b))

a pak $y(x) = \tilde{K} e^{-P(x)}, \tilde{K} \neq 0, x \in (a,b)$ ..(ii)

Z (i) a (ii) pak dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$\underline{y_H(x) = K e^{-P(x)} \;, \; K \in R, \; x \in (a,b)}$$

($K = \tilde{K}$ pro $y(x) \neq 0$, $K = 0$ pro $y(x) = 0$ (stacionární řeš.))

2) Řešení nehomogenní rovnice (s pravou stranou $f(x)$) <u>dostaneme metodou "variace konstant"</u> !

řešení hledáme ve tvaru

$$\underline{y(x) = K(x) e^{-P(x)} \;, \; x \in (a,b)} \; ; \text{ tedy}$$

hledáme <u>$K(x) \in C^1(a,b)$</u> ! Jak ?

Funkci $K(x)$ musíme najít tak, aby $y(x) = K(x)e^{-P(x)}$ bylo řešení rovnice (1), tj. aby platilo v (a,b)

$$\left(K(x)e^{-P(x)}\right)' + p(x)K(x)e^{-P(x)} = f(x), \quad x \in (a,b)$$

A provedeme-li derivaci, dostaneme:

$$K'(x)e^{-P(x)} + K(x)e^{-P(x)} \cdot (-P(x))' + p(x)K(x)e^{-P(x)} = f(x),$$

a protože je $P'(x) = p(x)$ v (a,b), máme pro $K(x)$ rovnici

$$K'(x)e^{-P(x)} = f(x),$$

tj.

$$K'(x) = f(x)e^{P(x)},$$

a pak v (a,b): $K(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx = \Phi(x) + C$

(funkce $f(x)e^{P(x)}$ má v (a,b) primitivní funkci, neboť je zde spojitá).

Pak tedy dostaneme: $y(x) = (\Phi(x) + C)e^{-P(x)}, \ x \in (a,b), \ C \in R$ (*)

3) Řešení počáteční úlohy: $y(x_0) = y_0, \ x_0 \in (a,b), \ y_0 \in R$?

Hledáme konstantu $C \in R$ v (*) tak, aby $y(x_0) = y_0$, tj.

$$y_0 = (\Phi(x_0) + C)e^{-P(x_0)}$$

a odtud dostaneme, že

$$C = \left(y_0 - \Phi(x_0)e^{-P(x_0)}\right) \cdot e^{P(x_0)} = y_0 e^{P(x_0)} - \Phi(x_0)$$

a tedy

$$y_{pú}(x) = y_0 e^{-(P(x) - P(x_0))} + (\Phi(x) - \Phi(x_0))e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b).$$

Tedy, protože jsme našli metodou variace konstant jediné řešení počáteční úlohy pro rovnici (1), z věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pak plyne, že metodou variace konstant jsme „našli" všechna řešení (1).

Řešení (*) $y(x) = (\phi(x) + c)\,e^{-P(x)}$ se nazývá obecné řešení rovnice (1) (a značí často $y_{ob}(x)$). ($x \in (a,b)$, $C \in R$)

Poznámka:
Řešení $y_{ob}(x) = (\phi(x) + c)\,e^{-P(x)}$ lze psát ve tvaru

$$y_{ob}(x) = c\,e^{-P(x)} + \phi(x)e^{-P(x)}\ ,\quad x \in (a,b),\ c \in R\ ;$$

Vidíme, že $c\,e^{-P(x)} = y_H(x)$ je řešení rovnice homogenní,
a $\phi(x)e^{-P(x)}$ je jedno řešení rovnice nehomogenní ($c = 0$) - nazývá se partikulární řešení nehomogenní rovnice) a značí obvykle

$$y_p(x) = \phi(x)\,e^{-P(x)}.$$

Potom lze psát $y_{ob}(x) = y_H(x) + y_p(x)$, $x \in (a,b)$
(a někdy lze řešení $y_p(x)$ najít i jinak, než variací konstant, t.zv. odhadem - ukážeme si)

Příklad 1: $y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}$

Zde $p(x) = 2x$, $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$ jsou funkce spojité v R, tedy rovnice má řešení právě jedno pro lib. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0, y_0 \in R$.

1) řešení homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$:
   (i) $y(x) \equiv 0$, $x \in R$ stacionární řešení;
   (ii) $y(x) = \tilde{K}.e^{-x^2}$, $\tilde{K} \neq 0$, $x \in R$ je řešení pro $y(x) \neq 0$ v R

a odtud: $y_H = K e^{-x^2}$, $K \in R$, $x \in R$

2) variace konstant:

hledáme řešení $y_p(x)$ ~~ve~~ tvaru $y_p(x) = K(x)e^{-x^2}$, $x \in R$;
pro hledanou funkci $K(x)$ dostaneme (jednodušší) diferenciální rovnici dosazením do dané diferenciální rovnice:

$$\left(K(x)e^{-x^2}\right)' + 2x\,K(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}, \text{ tj.}$$

$$K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x) + 2x\,K(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}, \quad x \in R$$

a odtud: $K'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, tedy

$$\underline{K'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad K(x) = x^2 + C, \quad x \in R, C \in R}$$

a pak $y_{ob}(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}$, $x \in R$, $C \in R$

nebo lze také: $\underline{y_{ob}(x) = Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}\ \left(= y_H(x) + y_p(x)\right)}$, $(*)$

$x \in R$, $C \in R$

3) řešení počáteční úlohy: máme najít řešení dané rovnice, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 3$ (víme, že je jediné) – hledáme tedy konstantu C ve $(*)$:

$y(0) = 3$: $\quad 3 = Ce^0 + 0e^0 \Rightarrow C = 3$

a $\quad \underline{y_{poč}(x) = (3 + x^2)e^{-x^2}, \ x \in R}$

Příklad 2: $\quad \underline{y' + \dfrac{1-2x}{x^2}\,y = 1}$, $x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$

a) řešení homogenní rovnice $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 0$

(i) stacionární řešení: $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$

(ii) „separace" pro $y(x) \neq 0$:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C, \quad C \in R, \quad x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$$

a tedy zde $y(x) = Kx^2e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $K \neq 0$

tedy, $\underline{y_H(x) = Kx^2 e^{\frac{1}{x}}, \ x \neq 0, \ K \in R}$

b) <u>variace konstant</u>: řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(x) = K(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad , x \neq 0, \text{ pak}$$

$$\left(K(x)x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)' + \frac{1-2x}{x^2} \cdot K(x) \cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

a $$K'(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} + K(x)\left(2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1-2x}{x^2} K(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1 \ ,$$

a tedy $$K'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \ ,$$

a pak $$K(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C, \ C \in R$$

a (*) $$y_{ob}(x) = \left(C + e^{-\frac{1}{x}}\right) x^2 e^{\frac{1}{x}} \ , \quad x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$$

$C \in R$

(nebo) $\underline{y_{ob}(x) = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2}$,

— // —

c) <u>počáteční úloha</u>: najít řešení, které splňuje podmínku

(i) $y(1) = 0$: $(x = 1, y = 0)$ – dosazením do (*):

$$0 = Ce + 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{e}$$

a $\underline{y_{poč}(x) = x^2\left(1 - e^{\frac{1}{x} - 1}\right), \ x \in (0, +\infty)}$

(ii) $y(-1) = 2$: $2 = Ce^{-1} + 1 \Rightarrow \underline{C = e}$

a $\underline{y_{poč}(x) = x^2\left(1 + e^{\frac{1}{x} + 1}\right) \ , x \in (-\infty, 0)}$

! Poznámka: k řešení diferenciální rovnice vždy „patří" interval, kde je nalezená funkce $y(x)$ řešením, zde je interval dán „počáteční podmínkou":
$y(1) = 0 \rightarrow x \in (0, +\infty)$; $y(-1) = 2 \rightarrow x \in (-\infty, 0)$

Příklad 3 – odhad „partikulárního řešení" – „pokusy"

a) $y' - 2y = x+1$, $y(0) = -1$

(i) $y_H(x) = Ke^{2x}$, $K \in R$, $x \in R$

(ii) $y_p(x)$: odhad : $y_p(x)$ „musí" být polynom
(z „jiné" funkce diferenciální operátor
$D(y) = y' - 2y$ „neudělá" polynom)

a zřejmě $y_p(x) = Ax + B$ – stačí „najít koeficienty polynomu A, B – jak? Opět – $y_p(x) = Ax+B$ má být řešením dané diferenciální rovnice, tedy má platit

$$(Ax+B)' - 2(Ax+B) = x+1 \quad , \text{ tj.}$$
$$-2Ax + (A-2B) = x+1 \quad , \text{ pro } x \in R,$$

a tedy (stejně jako u rozkladu racionální funkce na parciální zlomky) máme pro A, B soustavu rovnic:

$$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$
$$A - 2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{3}{4} \; ;$$

tedy: $y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ a $y_{OB}(x) = Ke^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, $x \in R$, $K \in R$

Řešení počáteční úlohy:

Z počáteční podmínky $y(0) = -1$ dostáváme rovnici pro K:

$$K - \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow K = -\frac{1}{4}$$

a pak $y_{POČ}(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, $x \in R$

b) $y' - 2y = 6e^{-x}$, $x \in R$

asi snadno „uhodneme", že diferenciální operátor $D(y) = y' - 2y$ „vyrobí" funkci $6e^{-x}$ (tj. pravou stranu zadané diferenciální rovnice) jen „z" funkce $y(x) = A \cdot e^{-x}$, kde $A \in R$ je konstanta, a tedy hledáme jen tuto A – a opět tak, aby $y_p(x) = Ae^{-x}, x \in R$ bylo řešení dané rovnice, tedy hledáme A tak, aby platilo

$$(Ae^{-x})' - 2Ae^{-x} = 6e^{-x}, \quad x \in R, \text{ tj.}$$

$$-Ae^{-x} - 2Ae^{-x} = 6e^{-x}, \quad x \in R, \text{ tj.}$$

$$-3A = 6 \iff A = -2,$$

tedy partikulární řešení je $y_p(x) = -2e^{-x}$, a obecné řešení dané rovnice: $y_{ob}(x) = Ke^{2x} - 2e^{-x}, \; x \in R, K \in R$

c) $y' - 2y = \sin x$, $x \in R$

A uvažujme podobně: aby platilo

$$y'(x) - 2y(x) = \sin x, \quad x \in R,$$

asi by mohlo být $y(x)$ součtem vhodných násobků funkcí $\sin x$ a $\cos x$ (říká se lineární kombinací funkcí $\sin x$ a $\cos x$) – zkusme to:

odhadneme $y_p(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$,

a opět hledáme koeficienty A, B tak, aby $y_p(x)$ řešilo danou rovnici, tj. (na další straně) aby platilo:

$$(A\sin x + B\cos x)' - 2(A\sin x + B\cos x) = \sin x, \quad x \in R,$$

tj. $A\cos x - B\sin x - 2(A\sin x + B\cos x) = \sin x$,

po „uspořádání"

(*) $\underline{(-2A - B)\sin x + (A - 2B)\cos x = \sin x, \ x \in R}$;

rovnice (*) bude platit pro všechna $x \in R$ právě tehdy, když se budou rovnat koeficienty u fce $\sin x$ i u funkce $\cos x$:
(nebo též, zvolíme $x = \frac{\pi}{2}$ pro srovnání koeficientů u sinu,
a $x = 0$ pro srovnání koeficientů u cosinu)

u $\sin x$: $\quad -2A - B = 1$
u $\cos x$: $\quad A - 2B = 0$

Máme tedy soustavu rovnic pro A, B, a ta má právě jedno řešení

$$\underline{A = -\frac{2}{5} \quad a \quad B = -\frac{1}{5}},$$

a tedy $\quad y_p(x) = -\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x, \ x \in R$

d) $\underline{y' - 2y = x \cdot e^{-x}}, \ x \in R$

a jak tedy „zvládnout" odhad v tomto příkladu, když pravá strana je součin polynomu a e^{-x}? Součin $f(x) = x e^{-x}$ operátor $D(y)$ „vyrobí" asi ze součinu polynomu 1. stupně $(Ax + B)$ a funkce e^{-x} - zkusme i toto:

odhadneme $\quad \underline{y_p(x) = (Ax + B)e^{-x}, \ x \in R}$,

a opět, A, B hledáme tak, aby funkce $(Ax + B)e^{-x}$ splňovala danou rovnici.

Tedy, dosazením do rovnice „máme"

$$\left((Ax+B)e^{-x}\right)' - 2(Ax+B)e^{-x} = xe^{-x},$$

a pak $\quad Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} - 2(Ax+B)e^{-x} = x\cdot e^{-x}, \quad x\in R,$

a tedy $\quad -3Ax \quad +(A-3B) \quad = x, \quad x\in R$

a srovnáním koeficientů opět dostáváme soustava rovnic pro A, B:

$$\begin{aligned} -3A &= 1 &\Rightarrow A &= -\tfrac{1}{3} \\ A-3B &= 0 &\Rightarrow B &= -\tfrac{1}{9}, \end{aligned}$$

a tedy $\quad \underline{y_p(x) = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-x}, \quad x\in R}.$

Pokusíme se, pro „zájemce" o zobecnění odhadu partikulárního řešení lineární rovnice 1. řádu, ale dříve si ukážme ještě jeden příklad:

e) $\quad \underline{y' - 2y = 3e^{2x}}, \quad x\in R$

Dle předchozích úspěšných odhadů zkusíme zde opět odhad

$$\underline{y_p(x) = Ae^{2x}, \quad x\in R},$$

a „hledáme" A (dosazením do rovnice zadané):

$$(Ae^{2x})' - 2Ae^{2x} = 3e^{2x}, \quad x\in R,$$

tj. $\quad 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 3e^{2x},$

a dostáváme $\quad 0 = 3e^{2x},$

neboli rovnici, která nemá řešení!

A asi by bylo dobré zjistit, proč se nám v tomto příkladu odhad nepovedl!

A co se stalo? „Náš odhad" $y_p(x) = Ae^{2x}$ je totiž řešení homogenní rovnice pro libovolné $A \in R$!
Tedy, $D(Ae^{2x}) = 0$! Ale i pro tento případ je znám způsob odhadu – řešení lze najít ve tvaru

$$\underline{y_p(x) = A \cdot x e^{2x}, \quad x \in R}$$

Pak (opět dosadíme do zadané rovnice):

$$(Axe^{2x})' - 2Axe^{2x} = 3e^{2x}, \qquad \text{a pak máme}$$

$$Ae^{2x} + Ax2e^{2x} - 2Axe^{2x} = 3e^{2x}, \quad \text{tj.}$$

$$Ae^{2x} + x(2A - 2A)e^{2x} = 3e^{2x} \quad \forall,$$

tedy $\quad \underline{A = 3}$

(vidíme, že „nulu" z minulého odhadu si „přetáhlo" $\underline{x}$!)

<u>A obecněji</u>: pro rovnici

$$\underline{y' + py = e^{ax}}$$

se tak stane, je-li $\underline{a = -p}$, neboť $y_H(x) = Ke^{-p \cdot x}$, $K \in R$
a zde pak opět pomůže odhad

$$\underline{y_p(x) = Axe^{-px}, \quad x \in R}$$

A na závěr, pokusme se o zobecnění návodu na odhad partikulárního řešení OLDR 1. řádu:
zřejmě lze partikulární řešení najít odhadem podobně, jak jsme si ukázali v předchozích příkladech, když v diferenciální rovnici bude $p(x)$ konstantní, tj. rovnice bude tvaru

$$y' + p \cdot y = f(x), \quad x \in (a,b), \; p \in R,$$

a $f(x)$ bude polynom, násobek exponenciely e^{ax}, dále kombinací funkcí $\sin(bx)$, $\cos(bx)$ $(a, b \in R)$, nebo, obecněji (vzhledem k pravidlu o derivování součinu funkcí) půjde odhad partikulárního řešení „udělat" i v případě, že $f(x)$ bude součinem uvedených funkcí.

Ø odhad obecně (v literatuře najdete):

Je-li dána rovnice

$$\underline{y' + py = e^{ax}\left(r(x)\cos bx + s(x)\sin bx\right)}, \quad x \in R$$

kde $a, b \in R$, a $r(x), s(x)$ jsou polynomy, $p \in R, p \neq 0$ (pro $p = 0$ je úloha jen výpočet primitivní funkce),

pak partikulární řešení $y_p(x)$ lze odhadnout ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{ax}\left(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right),$$

kde $k = 0$, je-li $a \neq -p$, a $k = 1$ pro $a = -p$, a $R(x), S(x)$ jsou polynomy takové, že (st $R(x)$ značí stupeň polynomu $R(x)$) $\text{st } R(x) = \text{st } S(x) = \max(\text{st } r(x), \text{st } s(x))$.

Koeficienty hledaných polynomů určíme dosazením předpokládaného tvaru řešení do dané rovnice a srovnáním koeficientů u polynomů (spec. u funkcí $\sin(bx)$ a $\cos(bx)$) dostaneme soustavu rovnic pro hledané koeficienty polynomů $R(x), S(x)$.

(Odhad partikulárního řešení bude užitečný v MA2 při řešení OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty.)

A na závěr – dva fyzikální „modely":

1. Řešení rovnice, popisující uvažování částice hmotnosti m v emulsi:

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg - kv \qquad (\text{z 2. Newtonova zákona})$$

(g - gravitační zrychlení, $v(t)$ - rychlost částice, $k>0$ konstanta).

Je-li m konstantní, dostaneme rovnici (s počáteční podmínkou)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \;, \quad v(0) = v_0$$

Řešení: 1) $v_H(t) = K e^{-\frac{k}{m}t}$, $K\in R$, $t \geq 0$

2) variace konstant: $v(t) = K(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ a pak

$$K'(t)e^{-\frac{k}{m}t} + K(t)e^{-\frac{k}{m}t}\left(-\frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m}K(t)e^{-\frac{k}{m}t} = g,$$

tedy pro $K(t)$ máme rovnici $K'(t) = g e^{\frac{k}{m}t}$,

a tedy $K(t) = g\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}t} + c$, $c\in R$

a obecné řešení je

$$v_{ob}(t) = c\,e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k} \;, t \geq 0 \quad (*)$$

Řešení počáteční úlohy s $v(0) = v_0$:

z (*) dostaneme $c = v_0 - g\frac{m}{k}$, a pak

$$v_{poč}(t) = \left(v_0 - g\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k}, \text{ a po úpravě}$$

$$v_{poč}(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \; t \geq 0.$$

Odtud vidíme, že $\lim\limits_{t\to\infty} v_{poč}(t) = g\frac{m}{k}$ („limitní pohyb" – „rovnoměrný", $v_{lim} = g\frac{m}{k}$)

2. Newtonův ochlazovací zákon:

Těleso teploty T_0 je umístěno do prostředí teploty $T_v < T_0$, pak pro teplotu $T(t)$ platí:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_v)\ ,\quad T(0) = T_0$$

(tedy opět lineární diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_v\ ,\quad T(0) = T_0\ )$$

Rovnici můžeme řešit přímo „separací":

pro $T > T_v$: $\displaystyle\int \frac{dT}{T - T_v} = -k \int dt$

$$\ln|T - T_v| = -kt + c,\ c \in R$$

a pak $\quad T(t) = T_v + Ke^{-kt},\ K > 0,\ t \geq 0$

a opět vidíme, že $\lim\limits_{t \to \infty} T(t) = T_v$

Řešení počáteční úlohy $T(0) = T_0$:

$$T_0 = T_v + K \Rightarrow K = T_0 - T_v,$$

tj. $\quad T_{př}(t) = T_v + (T_0 - T_v)e^{-kt}\ ,\ t \geq 0$